Matriz inversa

Operaciones con matrices

Matriz inversa

Definiciones

Sea la matriz cuadrada A ∈ M_n diremos que A es **inversible** o **regular** ↔ $\exists\, B \in M_n$ *cumpliéndose que*:

$$A \cdot B = B \cdot A = I_n$$

En este caso diremos que B es la matriz inversa de A; y también podemos decir que A es la inversa de B

A las matrices que cumplen esta propiedad las llamamos **regulares**

Una matriz se llama **ortogonal** cuando su matriz inversa coincide con su traspuesta $A^{-1} = A^t$

Matriz inversas

Veamos el siguiente ejemplo:

Sean las matrices $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}$ $y \quad B = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ -2 & 1 \end{pmatrix}$ ocurre que B es la matriz inversa de A, dado que:

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 2 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ -2 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

A y B son matrices regulares

Matriz inversa

Cálculo de la matriz inversa

Existen tres formas diferentes de a partir de una matriz hallar su matriz inversa, estas forma son:

1. Cálculo directo
2. Usando determinantes
3. Método de Gauss

En esta presentación usaremos el método directo, las dos últimas formas las veremos a lo largo del presente curso

Supongamos que tenemos la matriz $A = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}$ y queremos hallar su matriz inversa, haremos lo siguiente:

Llamaremos a la matriz buscada $B = \begin{pmatrix} x & y \\ z & t \end{pmatrix}$

Como B tiene que ser la matriz inversa de A, se tiene que cumplir que $\begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 2 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x & y \\ z & t \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$

Después de operar (multiplicar A y B) tendremos lo siguiente

$$\begin{pmatrix} x-z & y-t \\ 2x+z & 2y+t \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Igualando término a término las matrices anteriores tenemos que

$$\begin{cases} x - z = 1 \\ y - t = 0 \\ 2x + z = 0 \\ 2y + t = 1 \end{cases}$$

Matriz inversa

Cálculo de la matriz inversa

Tendremos que resolver el siguiente sistema de ecuaciones lineales

$$\begin{cases} x - z = 1 \\ y - t = 0 \\ 2x + z = 0 \\ 2y + t = 1 \end{cases}$$

Despejamos x e y de la primera y segunda ecuación para después sustituir en las otras dos ecuaciones
x=1+z ; y=t;
despejamos del sistema resultante la z y la t para finalmente sustituir estos resultados en las dos ecuaciones anteriores

$$\begin{cases} 2(1+z) + z = 0 \\ 2t + t = 1 \end{cases} \Longrightarrow \begin{cases} 3z = -2 \longrightarrow z = -\frac{2}{3} \\ 3t = 1 \longrightarrow t = \frac{1}{3} \end{cases} \Longrightarrow \begin{array}{l} x = 1 - \frac{2}{3} = \frac{1}{3} \\ y = \frac{1}{3} \end{array}$$

Como ya hemos hallado x,y,z y t sustituimos en nuestra matriz y habremos hallado la matriz B, inversa de la matriz de partida A

$$B = \begin{pmatrix} \frac{1}{3} & \frac{1}{3} \\ -\frac{2}{3} & \frac{1}{3} \end{pmatrix}$$

OBSERVACIÓN:
en este método se hacen muchos cálculos y para matrices de orden mayor de dos se recomienda usar cualquiera de los otros dos métodos, dejando el método de cálculo directo sólo para matrices de orden 2x2