Vectores en el plano

Producto escalar

Vectores en el plano

Definiciones

Producto escalar de dos vectores : El resultado del producto escalar de dos vectores es un número real que se puede obtener de una de las dos formas siguientes

Sean los vectores $\vec{u}(u_1, u_2)$ y $\vec{v}(v_1, v_2)$ el producto escalar de estos dos vectores $\vec{u} \cdot \vec{v}$ se puede calcular de una de estas formas

- $\vec{u} \cdot \vec{v} = u_1 \cdot v_1 + u_2 \cdot v_2$
- $\vec{u} \cdot \vec{v} = |\vec{u}| \cdot |\vec{v}| \cdot \cos(\widehat{\vec{u}, \vec{v}})$

Claramente de la definición se deduce lo siguiente

- Si dos vectores son perpendiculares su producto escalar valdrá cero

  En efecto, si $\vec{u}$ y $\vec{v}$ son perpendiculares formarán un ángulo de 90° y como $\cos 90º = 0$ sustituyendo en la fórmula anterior tendremos que $\vec{u} \cdot \vec{v} = |\vec{u}| \cdot |\vec{v}| \cdot \cos\left(\widehat{\vec{u}, \vec{v}}\right) = \vec{u} \cdot \vec{v} = |\vec{u}| \cdot |\vec{v}| \cdot 0$ =0

- Si dos vectores son paralelos el resultado del producto escalar es el producto de sus módulos

  En efecto, si $\vec{u}$ y $\vec{v}$ son paralelos formarán un ángulo de 0° y como $\cos 0º$ =1 sustituyendo en la fórmula anterior tendremos que $\vec{u} \cdot \vec{v} = |\vec{u}| \cdot |\vec{v}| \cdot \cos\left(\widehat{\vec{u}, \vec{v}}\right) = \vec{u} \cdot \vec{v} = |\vec{u}| \cdot |\vec{v}| \cdot 1 = |\vec{u}| \cdot |\vec{v}|$

Vectores en el plano

Ejemplo práctico

Sean los vectores $\vec{u}\left(\frac{1}{2},-3\right)$ y $\vec{v}(-2,1)$ el producto escalar de estos dos vectores $\vec{u}\cdot\vec{v}$ se puede calcular de esta forma

$$\vec{u}\cdot\vec{v} = u_1\cdot v_1 + u_2\cdot v_2$$

$$\left(\frac{1}{2},-3\right)\cdot(-2,1) = \frac{1}{2}\cdot(-2)+(-3)\cdot 1 = -1-3=-4$$

Sean los vectores $\vec{u}\left(\frac{1}{2},-3\right)$ y $\vec{v}(-2,1)$, halla el ángulo que forman

Veamos:

Tenemos que $\vec{u}\cdot\vec{v} = |\vec{u}|\cdot|\vec{v}|\cdot\cos(\widehat{\vec{u},\vec{v}})$

Como anteriormente hemos hallado $\vec{u}\cdot\vec{v} = -4$, podemos poner $-4=|\vec{u}|\cdot|\vec{v}|\cdot\cos(\widehat{\vec{u},\vec{v}})$

además $|\vec{u}| = \sqrt{(\frac{1}{2})^2+(-3)^2} = \sqrt{\frac{1}{4}+9} = \sqrt{\frac{37}{4}} = \frac{\sqrt{37}}{2}$; $|\vec{v}| = \sqrt{(-2)^2+1^2} = \sqrt{4+1} = \sqrt{5}$

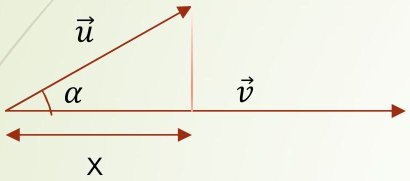
Luego $-4=\frac{\sqrt{37}}{2}\cdot\sqrt{5}\cdot\cos(\widehat{\vec{u},\vec{v}})$; $\Rightarrow$ $-4=\frac{\sqrt{185}}{2}\cdot\cos(\widehat{\vec{u},\vec{v}})$; $\Rightarrow$ $\cos(\widehat{\vec{u},\vec{v}}) = \frac{-8}{\sqrt{185}}$; $\Rightarrow$ $\alpha = arcos(\frac{-8}{\sqrt{185}}) \cong 126{,}02°$

Como norma general, podemos poner:

$$\cos(\widehat{\vec{u},\vec{v}}) = \frac{\vec{u}\cdot\vec{v}}{|\vec{u}|\cdot|\vec{v}|}; \qquad \alpha = arcos(\frac{\vec{u}\cdot\vec{v}}{|\vec{u}|\cdot|\vec{v}|})$$

Proyección ortogonal de $\vec{u}$ sobre $\vec{v}$

Proyección ortogonal de un vector sobre otro



$$\cos\alpha = \frac{cateto\ contiguo}{hipotenusa} = \frac{x}{|\vec{u}|} \to \cos\alpha = \frac{x}{|\vec{u}|} \to x = |\vec{u}|\cos\alpha$$

Por otra parte tenemos que $\cos(\widehat{\vec{u},\vec{v}}) = \frac{\vec{u}\cdot\vec{v}}{|\vec{u}|\cdot|\vec{v}|} \to x = |\vec{u}|\cos\alpha \to x = |\vec{u}|\frac{\vec{u}\cdot\vec{v}}{|\vec{u}|\cdot|\vec{v}|} \to x = \frac{\vec{u}\cdot\vec{v}}{|\vec{v}|}$

A x la llamamos proyección ortogonal de $\vec{u}$ sobre $\vec{v}$, es la medida desde el vértice del triángulo anterior hasta el corte con $\vec{v}$ de la perpendicular suya que pasa por el extremo final del valor $\vec{u}$

$$P_{\vec{u},\vec{v}} = \frac{\vec{u}\cdot\vec{v}}{|\vec{v}|}$$