Propiedades del determinante de una matriz

Propiedades de los determinantes

Propiedades de los determinantes

1ª) *El determinante de una matriz A es igual al determinante de su traspuesta.*

$$|A| = |A^t|$$

Ejemplo

$$|A| = \begin{vmatrix} 2 & 3 & 4 \\ 1 & 3 & 2 \\ 5 & 1 & 6 \end{vmatrix} = -12$$

$$|A^t| = \begin{vmatrix} 2 & 1 & 5 \\ 3 & 3 & 1 \\ 4 & 2 & 6 \end{vmatrix} = -12$$

2ª) *Si los elementos de una fila o de una columna se multiplican todos por un número, el determinante queda multiplicado por dicho número.*

$$\begin{vmatrix} k\cdot a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ k\cdot a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ k\cdot a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} = k\cdot \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix}$$

Ejemplo

$$|A| = \begin{vmatrix} 4 & 3 & 4 \\ 2 & 3 & 2 \\ 10 & 1 & 6 \end{vmatrix} = -24$$

$$|A| = \begin{vmatrix} 4 & 3 & 4 \\ 2 & 3 & 2 \\ 10 & 1 & 6 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 2\cdot 2 & 3 & 4 \\ 2\cdot 1 & 3 & 2 \\ 2\cdot 5 & 1 & 6 \end{vmatrix} = 2\begin{vmatrix} 2 & 3 & 4 \\ 1 & 3 & 2 \\ 5 & 1 & 6 \end{vmatrix} = -24$$

Propiedades de los determinantes

3ª) Si los elementos de una línea se pueden descomponer en suma de dos o más sumandos, el determinante será igual a la suma de dos determinantes (o más) que tienen todas las restantes líneas iguales y en dicha línea tienen los primeros, segundos, etc. sumandos.

$$\begin{vmatrix} a_{11}+b_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21}+b_{12} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31}+b_{13} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} b_{11} & a_{12} & a_{13} \\ b_{21} & a_{22} & a_{23} \\ b_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix}$$

Ejemplo

$$|A| = \begin{vmatrix} 1 & 7 & 3 \\ 4 & 7 & -1 \\ 3 & 9 & 5 \end{vmatrix} = -72$$

$$|A| = \begin{vmatrix} 1 & 7 & 3 \\ 4 & 7 & -1 \\ 3 & 9 & 5 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & 2+5 & 3 \\ 4 & 3+4 & -1 \\ 3 & 4+5 & 5 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 3 & -1 \\ 3 & 4 & 5 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} 1 & 5 & 3 \\ 4 & 4 & -1 \\ 3 & 5 & 5 \end{vmatrix} = -6 - 66 = -72$$

4ª) Si en un determinante los elemento de una línea son nulos, el determinante es nulo.

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ 0 & 0 & 0 \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} = 0$$

Ejemplo

$$|A| = \begin{vmatrix} 0 & 3 & 4 \\ 0 & 3 & 2 \\ 0 & 1 & 6 \end{vmatrix} = 0$$

Propiedades de los determinantes

5ª) *Si en una matriz se permutan dos filas (o dos columnas), el determinante cambia de signo.*

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{13} & a_{12} \\ a_{21} & a_{23} & a_{22} \\ a_{31} & a_{33} & a_{32} \end{vmatrix} = -\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix}$$

Ejemplo

$$\begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 3 & -1 \\ 3 & 4 & 5 \end{vmatrix} = -6$$

$$\begin{vmatrix} 4 & 3 & -1 \\ 1 & 2 & 3 \\ 3 & 4 & 5 \end{vmatrix} = 6$$

La propiedad 6 queda incluida en la propiedad 7

7ª) *Si una matriz cuadrada tiene dos filas o dos columnas proporcionales, su determinante es nulo.*

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a & k\cdot a \\ a_{21} & b & k\cdot b \\ a_{31} & c & k\cdot c \end{vmatrix} = 0$$

Ejemplo

$$|A| = \begin{vmatrix} 1 & 4 & 3 \\ 2 & 8 & 6 \\ 3 & 1 & 7 \end{vmatrix} = 0$$

La segunda fila es el resultado de multiplicar la primera por 2

Esta propiedad también es válida cuando se cumple la igualdad entre filas o columnas

Propiedades de los determinantes

8ª) *Si los elementos de una línea son combinación lineal de las restantes líneas paralelas, el determinante es nulo.*

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & r\cdot a_{11}+s\cdot a_{12} \\ a_{21} & a_{22} & r\cdot a_{21}+s\cdot a_{22} \\ a_{31} & a_{32} & r\cdot a_{31}+s\cdot a_{32} \end{vmatrix} = 0$$

Ejemplo

$$\begin{vmatrix} 6 & 1 & 13 \\ 2 & -2 & 3 \\ -4 & -3 & -10 \end{vmatrix} = 0$$

$f_2 = f_1 + f_3$

10ª) *El* determinante *del producto de dos matrices cuadradas es igual al producto de los determinantes de las matrices:*

$$|A\cdot B| = |A|\cdot|B|$$

Propiedades de los determinantes

Ejemplo de uso

Sabiendo que $\begin{vmatrix} a & b & c \\ p & q & r \\ x & y & z \end{vmatrix} = -2$ calcula sin desarrollar:

$$\begin{vmatrix} x & a-3p & -2a \\ y & b-3q & -2b \\ z & c-3r & -2c \end{vmatrix} =$$

$$\begin{vmatrix} x & a-3p & -2a \\ y & b-3q & -2b \\ z & c-3r & -2c \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} x & a & -2a \\ y & b & -2b \\ z & c & -2c \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} x & -3p & -2a \\ y & -3q & -2b \\ z & -3r & -2c \end{vmatrix} = -2 \overbrace{\cancel{\begin{vmatrix} x & a & a \\ y & b & b \\ z & c & c \end{vmatrix}}}^{0} -3 \begin{vmatrix} x & p & -2a \\ y & q & -2b \\ z & r & -2c \end{vmatrix} = 0 - 3 \begin{vmatrix} x & p & -2a \\ y & q & -2b \\ z & r & -2c \end{vmatrix} =$$

$$(-3)(-2) \begin{vmatrix} x & p & a \\ y & q & b \\ z & r & c \end{vmatrix} = 6 \begin{vmatrix} x & p & a \\ y & q & b \\ z & r & c \end{vmatrix} = 6 \begin{vmatrix} x & y & z \\ p & q & r \\ a & b & c \end{vmatrix} = -6 \begin{vmatrix} a & b & c \\ p & q & r \\ x & y & z \end{vmatrix} = (-6)(-2) = 12$$

Luego

$$\begin{vmatrix} x & a-3p & -2a \\ y & b-3q & -2b \\ z & c-3r & -2c \end{vmatrix} = 12$$