Rango de una matriz

Cálculo de rango de matrices

Rango de una matriz

Definición: llamaremos rango de una matriz al mayor número de vectores fila o columna linealmente independientes

Para tratar esta definición debemos ver los números de cualquier matriz como coordenadas de vectores
Veamos,

$$\text{Sea la matriz } A = \begin{pmatrix} -2 & 0 & 1 & -1 \\ 4 & 4 & -3 & 5 \\ 3 & 2 & -2 & 3 \end{pmatrix} \in M_{3\times 4}$$

Si nos fijamos en las filas podemos ver tres vectores: $\overrightarrow{u_1}(-2,0,1,-1)$; $\overrightarrow{u_2}(4,4,-3,5)$; $\overrightarrow{u_3}(3,2,-2,3)$ con 4 coordenadas cada uno.
Si nos fijamos en la columnas vemos 4 vectores: $\overrightarrow{v_1}(-2,4,3)$; $\overrightarrow{v_2}(0,4,2)$; $\overrightarrow{v_3}(1,-3,-2)$; $\overrightarrow{v_4}(-1,5,3)$ con 3 coordenadas cada uno

El rango de esta matriz será como mucho 3 (número mínimo de filas o columnas de la matriz)

Si nos fijamos en las filas vemos como la 2ª fila depende linealmente de las filas 1ª y 2ª, concretamente podemos poner

$$\overrightarrow{u_2} = 2\overrightarrow{u_3} + \overrightarrow{u_1} \qquad (2^{\underline{a}} fila = 2\ veces\ la\ \ 3^{\underline{o}}\ fila\ más\ la\ 1^{\underline{a}}\ fila)$$

Dado que $(4,4,-3,5)$=2$(3,2,-2,3)$+$(-2,0,1,-1)$

Hemos puesto $\overrightarrow{u_2}$ como combinación lineal de los otros dos vectores $\overrightarrow{u_1}\ y \overrightarrow{u_3}$ podemos decir que $\overrightarrow{u_1}$, $\overrightarrow{u_2}$ y $\overrightarrow{u_3}$ dependen linealmente.

Si nos fijamos ahora en $\overrightarrow{u_1}$ y $\overrightarrow{u_3}$ vemos que no hay ninguna dependencia entre ellos y por lo tanto son vectores linealmente independientes L.I.

Como el número máximo de vectores L.I. entre los vectores fila es 2; podremos afirmara que

Rag(A)=2

Definiciones

Rango de una matriz

Definición: Dada una matriz de *mxn*, llamaremos menor de orden *k* al determinante de orden k formado por la intersección de *k* filas y *k* columnas

,

Sea la matriz $A = \begin{pmatrix} -2 & 0 & 1 & -1 \\ 4 & 4 & -3 & 5 \\ 3 & 2 & -2 & 3 \end{pmatrix} \in M_{3\times4}$

Vamos algunos menores de ella, de orden tres tenemos:

$$\begin{vmatrix} -2 & 0 & 1 \\ 4 & 4 & -3 \\ 3 & 2 & -2 \end{vmatrix}; \begin{vmatrix} -1 & 0 & 1 \\ 5 & 4 & -3 \\ 3 & 2 & -2 \end{vmatrix}; \begin{vmatrix} -2 & -1 & 1 \\ 4 & 5 & -3 \\ 3 & 3 & -2 \end{vmatrix}; \begin{vmatrix} -2 & 0 & -1 \\ 4 & 4 & 5 \\ 3 & 2 & 3 \end{vmatrix}$$

Menores de orden dos tendremos:

$$\begin{vmatrix} -2 & 0 \\ 4 & 4 \end{vmatrix}; \begin{vmatrix} 1 & 0 \\ -3 & 4 \end{vmatrix}; \begin{vmatrix} -1 & 0 \\ 5 & 4 \end{vmatrix}; \begin{vmatrix} 1 & -1 \\ -3 & 5 \end{vmatrix}; \begin{vmatrix} 4 & 4 \\ 3 & 2 \end{vmatrix} \ldots.\ldots\ldots.(todas\ los\ posibles\ combinaciones\ de\ 2x2\ que\ podamos\ hacer).$$

El método anterior se hace tedioso cuando la matriz es complicada, por eso disponemos de otro método para el cálculo de rangos, para ello necesitaremos conocer la definición de Menor de orden k

Regla de cálculo

Rango de una matriz

Definición: podemos también definir el rango de una matriz como el orden del menor de mayor orden no nulo que podemos encontrar entre todos los menores de duna matriz

,

Sea la matriz $A=\begin{pmatrix}-2 & 0 & 1 & -1\\ 4 & 4 & -3 & 5\\ 3 & 2 & -2 & 3\end{pmatrix}\in M_{3\times4}$

Los menores de orden 3 de esta matriz eran:

$$\begin{vmatrix}-2 & 0 & 1\\ 4 & 4 & -3\\ 3 & 2 & -2\end{vmatrix};\begin{vmatrix}-1 & 0 & 1\\ 5 & 4 & -3\\ 3 & 2 & -2\end{vmatrix};\begin{vmatrix}-2 & -1 & 1\\ 4 & 5 & -3\\ 3 & 3 & -2\end{vmatrix};\begin{vmatrix}-2 & 0 & -1\\ 4 & 4 & 5\\ 3 & 2 & 3\end{vmatrix}$$

$\begin{vmatrix}-2 & 0 & 1\\ 4 & 4 & -3\\ 3 & 2 & -2\end{vmatrix}$=16+0+8-12-12-0=0

Haríamos lo mismo con los otros tres determinantes obteniendo siempre 0

Menores de orden dos tendremos:

$$\begin{vmatrix}-2 & 0\\ 4 & 4\end{vmatrix};\begin{vmatrix}1 & 0\\ -3 & 4\end{vmatrix};\begin{vmatrix}-1 & 0\\ 5 & 4\end{vmatrix};\begin{vmatrix}1 & -1\\ -3 & 5\end{vmatrix};\begin{vmatrix}4 & 4\\ 3 & 2\end{vmatrix}\ldots.\ldots\ldots.(todas\ los\ posibles\ combinaciones\ de\ 2x2\ que\ podamos\ hacer).$$

,El rango de esta matriz es como mucho 3, (número menor de filas y columnas); tendrá rango 3 si encontramos un menor suyo de 3x3 cuyo determinante sea cero; al hacer los determinantes anteriores de orden 3 vemos que todos dan cero

Luego el rango no podrá ser 3, entonces el rango tendrá que ser 2 o 1, probamos con uno, si nos fijamos en el determinante

$$\begin{vmatrix}-2 & 0\\ 4 & 4\end{vmatrix}=-8-0=-8\neq0$$

Luego el rango será 2, porque hemos encontrado un menor de orden 2 cuyo valor es distinto de cero.

Rag(A)=2