Álgebra de matrices

Operaciones con matrices

Álgebra de Matrices

Suma/resta de matrices

Sean las matrices A y B, ambas del mismo orden

$$A=\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n-} & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & & a_{2n-1} & a_{2n} \\ \vdots & & \ddots & \vdots & \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn-} & a_{mn} \end{pmatrix} \in M_{mxn}\,; \quad B=\begin{pmatrix} b_{11} & b_{12} & \cdots & b_{1n-1} & b_{1n} \\ b_{21} & b_{22} & & b_{2n-1} & b_{2n} \\ \vdots & & \ddots & \vdots & \\ b_{m1} & b_{m2} & \cdots & b_{mn-1} & b_{mn} \end{pmatrix} \in M_{mxn}$$

Para poder sumar o restar matrices, estas han de ser del **mismo orden** y además el **resultado** será otra matriz del **mismo orden** que las de **partida**

La suma o la resta de ambas matrices se hacer sumando o restando término a término todos los términos que ocupan la misma posición

$$\begin{pmatrix} -1 & 2 & 0 \\ \frac{1}{3} & 5 & 1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 2 & 1 & -1 \\ 3 & -2 & 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 3 & -1 \\ \frac{10}{3} & 3 & 4 \end{pmatrix}$$

sumamos o restamos término a término cada uno y el resultado ocupa el mismo lugar

$$\begin{pmatrix} -1 & 2 \\ 0 & -4 \\ 3 & 1 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} -3 & -2 \\ 3 & 1 \\ 2 & -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & 4 \\ -3 & -5 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}$$

Matriz nula
Es la matriz en la que todos sus elementos valen cero y es el elemento neutro de la suma, o sea hace el mismo papel que 0 en los números enteros

$$\begin{pmatrix} -1 & 2 \\ 0 & -4 \\ 3 & 1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 & 2 \\ 0 & -4 \\ 3 & 1 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} -1 & 2 & 0 \\ \frac{1}{3} & 5 & 1 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 & 2 & 0 \\ \frac{1}{3} & 5 & 1 \end{pmatrix}$$

La suma de matrices es **conmutativa**
A+B=B+A

Álgebra de Matrices

Producto de matrices

Sean las matrices A ∈ M_{mxn} y B ∈ M_{nxp} , A x B = C ∈ M_{mxp}

A= $\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n-1} & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & & a_{2n-1} & a_{2n} \\ \vdots & & \ddots & \vdots & \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn-1} & a_{mn} \end{pmatrix} \in M_{mxn}$; B= $\begin{pmatrix} b_{11} & b_{12} & \cdots & b_{1p-1} & b_{1p} \\ b_{21} & b_{22} & & b_{2p-1} & b_{2p} \\ \vdots & & \ddots & \vdots & \\ b_{n1} & b_{n2} & \cdots & b_{np-1} & b_{np} \end{pmatrix} \in M_{nxp}$ B= $\begin{pmatrix} c_{11} & c_{12} & \cdots & c_{1p-1} & c_{1p} \\ c_{21} & c_{22} & & c_{2p-1} & c_{2p} \\ \vdots & & \ddots & \vdots & \\ c_{m1} & c_{m2} & \cdots & c_{mp-1} & c_{mp} \end{pmatrix} \in M_{mxp}$

Para poder multiplicar matrices, el número de columnas de la primera debe coincidir con el número de filas de la segunda y además el resultado será una matriz que tendrá el mismo número de filas que tenía la primera y el mismo número de columnas que tenía la segunda

Sean las matrices A y B con A ∈ M_{mxn} , B ∈ M_{nxp} ; y sea la matriz C= A x B se cumple que C ∈ M_{mxp}

y además $C_{IJ} = \sum_{k=1}^{n} b_{ik} \cdot b_{kj}$

Multiplicamos filas por columnas

$$\begin{pmatrix} -1 & 2 \\ 0 & -4 \\ 3 & 1 \end{pmatrix} * \begin{pmatrix} 2 & 1 & -1 \\ 3 & -2 & 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1*2+2*3 & -1*1+2*(-2) & -1*(-1)+2*3 \\ 0*2+(-4)*3 & 0*1+(-4)*(-2) & 0*(-1)+(-4)*3 \\ 3*2+1*3 & 3*1+1*(-2) & 3*(-1)+1*3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4 & -5 & 7 \\ -12 & 8 & -12 \\ 9 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

El producto de matrices 3x2 y 2x3 dan como resultado una matriz 3x3

Álgebra de Matrices

Producto de matrices

$$\begin{pmatrix} 2 & 1 & -1 \\ 3 & -2 & 3 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} 1 & -3 & 0 \\ -2 & 2 & -1 \\ 0 & 1 & 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2*1+1*(-2)+(-1)*0 & 2*(-3)+1*2+(-1)*1 & 2*0+1*(-1)+(-1)*3 \\ 3*1+(-2)*(-2)+3*0 & 3*(-3)+(-2)*2+3*1 & 3*0+(-2)*(-1)+3*3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & -5 & -4 \\ 7 & -10 & 11 \end{pmatrix}$$

La matriz $I_n = \begin{pmatrix} 1 & \cdots & 0 \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & \cdots & 1 \end{pmatrix}$ matriz en la que todos sus elementos valen 0 excepto los de la diagonal principal cumple lo siguiente

$$A \cdot I_n = I_n \cdot A \quad \forall \ A \in M_{nxn}$$

Se cumple que el producto de matrices es **distributivo** respecto de la suma, es decir

A(B+C)=AB+AC

MATRIZ IDENTIDAD

La matriz I_n es una matriz cuadrada de orden n que al multiplicarla con cualquier otra matriz cuadrada del mismo orden, da como resultado la propia matriz por la que multiplico. Veamos:

$$\begin{pmatrix} 2 & -3 \\ -4 & 5 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2*1+(-3)*0 & 2*0+(-3)*1 \\ (-4)*1+5*0 & (-4)*0+5*1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & -3 \\ -4 & 5 \end{pmatrix} \quad luego:$$

$$\begin{pmatrix} 2 & -3 \\ -4 & 5 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & -3 \\ -4 & 5 \end{pmatrix}$$

El producto de matrices **no es en general conmutativo**, veamos:

$$\begin{pmatrix} 2 & -3 \\ -4 & 5 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -4 & 7 \\ 6 & -13 \end{pmatrix} \quad ; \quad \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & -1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 2 & -3 \\ -4 & 5 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -6 & 7 \\ 8 & -11 \end{pmatrix}$$

A x B B x A

$$A \times B \neq B \times A$$

Diremos que una matriz A es **conmutable** con otra matriz B cuando A x B = B x A

Diremos que una matriz A es **idempotente** cuando A^2=A; es decir cuando A x A= A

Se cumple que

$(A \cdot B)^t = B^t \cdot A^t$

$(A+B)^t = A^t + B^t = B^t + A^t$

$(c \cdot A)^t = c \cdot A^t$