Determinante de una matriz

Cálculo del determinante de matrices

Determinante de una matriz

Definiciones

El determinante de una matriz será un número.
En esta clase veremos cómo hallarlo. Dada una matriz A, representaremos su determinante como

$$|A|$$

Veamos cómo hallar el determinante de una matriz en un caso sencillo, para ello hacemos el determinante de una matriz de orden 2x2

Sea la matriz $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}$ su determinante será de la forma:

$$|A| = \begin{vmatrix} 1 & 0 \\ 2 & 1 \end{vmatrix} = \mathbf{1 \cdot 1 - 0 \cdot 2 = 1 - 0 = 1}$$

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 2 & 1 \end{pmatrix} \qquad \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}$$

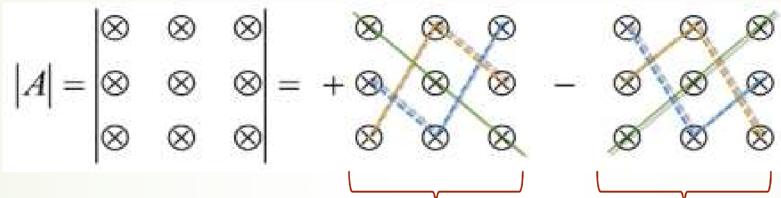
Lo hemos hallado multiplicando en cruz los elemento de las dos diagonales, a la que vemos de izquierda a derecha la multiplicamos tal cual y a la que va de derecha a izquierda le cambiamos el signo al resultado

Determinante de una matriz

Regla de Sarrus

Cuando estamos ante una matriz de orden 3x3 podemos usar la regla de Sarrus

Al igual que antes, multiplicamos los elementos de la matriz y al resultado de estas multiplicaciones en unos casos les cambiaremos el signo y en otros no, veamos:



Al resultado de esta multiplicaciones **NO** le cambiamos el signo

Al resultado de estas multiplicaciones **SI** le cambiamos el signo

$$|A| = \begin{vmatrix} 3 & 1 & 0 \\ -2 & 1 & 2 \\ 3 & 2 & -1 \end{vmatrix} = 3 \cdot 1 \cdot (-1) + 1 \cdot 2 \cdot 3 + (-2) \cdot 2 \cdot 0 - (0 \cdot 1 \cdot 3) - (2 \cdot 2 \cdot 3) - \big(1 \cdot (-2) \cdot (-1)\big) =$$

$$|A| = -3+6-0-0-12-2=-11$$

$$|A| = -11$$

Determinante de una matriz

Determinante de una matriz de orden mayor a 3x3

El método expuesto aquí se puede usar para hallar el determinante de cualquier matriz cuadrada, pero se utiliza Especialmente para matrices de orden superior a 3

Antes de abordar estos problemas tengamos en cuenta algunas definiciones

MENOR COMPLEMENTARIO

Dada una matriz cuadrada A, de orden n, se llama **menor complementario** del elemento a_{ij}, y se representa por $\boldsymbol{\alpha}_{ij}$, al determinante de orden $(n-1)$ que se obtiene al eliminar la fila i y la columna j.

$$A = \begin{pmatrix} \cancel{a_{11}} & \cancel{a_{12}} & \cancel{a_{13}} \\ a_{21} & \cancel{a_{22}} & a_{23} \\ a_{31} & \cancel{a_{32}} & a_{33} \end{pmatrix} \qquad \alpha_{12} = \begin{vmatrix} a_{21} & a_{23} \\ a_{31} & a_{33} \end{vmatrix}$$

ADJUNTO DE UN ELEMENTO

Dada una matriz cuadrada A, de orden n, se llama **adjunto del elemento** a_{ij} y se representa por A_{ij}, al menor complementario α_{ij}, precedido del signo + o – según que la suma de los subíndices $(i + j)$ sea par o impar:

$$A_{ij} = (-1)^{i+j}\alpha_{ij}$$

CÁLCULO DEL DETERMINANTE

El determinante de una matriz es igual a la suma de los productos de los elementos de una línea por sus adjuntos correspondientes.

Determinante de una matriz

Determinante de una matriz de orden mayor a 3x3

Veamos todo esto con un ejemplo

Proponemos hallar el siguiente determinante $\begin{vmatrix} 1 & 3 & -2 & 5 \\ 5 & 0 & 3 & 1 \\ 2 & 5 & 6 & 3 \\ -1 & 2 & 3 & 2 \end{vmatrix}$ (matriz 4x4, no se puede hacer con la regla de Sarrus)

Primero elegimos una fila o columna, la que queramos, preferiblemente erigiremos aquella que tenga números más sencillos, como por ejemplo la que tenga más ceros, si los hay

Tomamos la segunda columna empezando por la izquierda, por tener ceros, y hallamos los adjuntos de todos los elementos

MENORES COMPLEMENTARIOS

$A_{12} = (-1)^{1+2}\alpha_{12} = (-1)^3 \begin{vmatrix} 5 & 3 & 1 \\ 2 & 6 & 3 \\ -1 & 3 & 2 \end{vmatrix} =$ $(-1)[60 - 9 + 6 + 6 - 45 - 12] = (-1)(36) = -36$ $A_{12} = -36$	$A_{22} = (-1)^{2+2}\alpha_{22} = (-1)^4 \begin{vmatrix} 1 & -2 & 5 \\ 2 & 6 & 3 \\ -1 & 3 & 2 \end{vmatrix} =$ $(+1)[12 + 6 + 30 + 30 - 9 + 8] = (+1)(77) = 77$ $A_{22} = 77$
$A_{32} = (-1)^{3+2}\alpha_{32} = (-1)^5 \begin{vmatrix} 1 & -2 & 5 \\ 5 & 3 & 1 \\ -1 & 3 & 2 \end{vmatrix} =$ $(-1)[6 + 2 + 75 + 15 - 3 + 20] = (-1)(115) = -115$ $A_{32} = --115$	$A_{42} = (-1)^{4+2}\alpha_{42} = (-1)^6 \begin{vmatrix} 1 & -2 & 5 \\ 5 & 3 & 1 \\ 2 & 6 & 3 \end{vmatrix} =$ $(+1)[9 - 4 + 150 - 30 - 6 + 30] = (+1)(149) = 149$ $A_{42} = 149$

$$|A| = 3 \cdot (-36) + 0 \cdot 77 + 5 \cdot (-115) + 2 \cdot 149 = -385$$

$$|A| = -385$$

Determinante de una matriz

Caso fácil

Supongamos que tenemos que manejar el determinante de una matriz triangular, en este caso la mejor forma de tratar dicho determinante es usando los adjuntos aprovechando que tendremos muchos valores nulos

Supongamos que queremos hallar el valor de a para que se cumpla la siguiente igualdad

$$\begin{vmatrix} 1 & -38 & 53 & -78 \\ 0 & -4 & 87 & -39 \\ 0 & 0 & a & 93 \\ 0 & 0 & 0 & -2 \end{vmatrix} = 24$$

Ene este caso lo más interesante es hallar el determinante por los adjuntos que quedan al tratar la primer columna

$$\begin{vmatrix} 1 & -38 & 53 & -78 \\ 0 & -4 & 87 & -39 \\ 0 & 0 & a & 93 \\ 0 & 0 & 0 & -2 \end{vmatrix} = 1 \cdot (-1)^2 \begin{vmatrix} -4 & 87 & -39 \\ 0 & a & 93 \\ 0 & 0 & -2 \end{vmatrix} \cancel{+ 0 \cdot (-1)^3 \begin{vmatrix} -38 & 53 & -78 \\ 0 & a & 93 \\ 0 & 0 & -2 \end{vmatrix}} \cancel{+ 0 \cdot (-1)^4 \begin{vmatrix} -38 & 53 & -78 \\ -4 & 87 & -39 \\ 0 & 0 & -2 \end{vmatrix}} \cancel{+ 0 \cdot (-1)^5 \begin{vmatrix} -38 & 53 & -78 \\ -4 & 87 & -39 \\ 0 & a & 93 \end{vmatrix}} = \begin{vmatrix} -4 & 87 & -39 \\ 0 & a & 93 \\ 0 & 0 & -2 \end{vmatrix} =$$

$$-4 \cdot (-1)^2 \begin{vmatrix} a & 93 \\ 0 & -2 \end{vmatrix} \cancel{+ 0 \cdot (-1)^3 \begin{vmatrix} 87 & -39 \\ 0 & -2 \end{vmatrix}} \cancel{+ 0 \cdot (-1)^4 \begin{vmatrix} 87 & -39 \\ a & -93 \end{vmatrix}} = -4 \cdot \begin{vmatrix} a & 93 \\ 0 & -2 \end{vmatrix} = -4(-2a - 0 \cdot 93) = -4(-2a) = 8a$$

Luego la expresión anterior nos quedaría

$$8a = 24 \rightarrow a = \frac{24}{8} = 3$$