Matriz inversa

Usando determinantes

Matriz inversa

Definiciones

Para que una matriz tenga inversa, lo primero que debe de ocurrir es que sea cuadrada. Además de poder calcularla mediante el método directo, también la podremos hallar mediante la siguiente expresión

$$A^{-1} = \frac{1}{|A|}[Adj(A)]^{t}$$

Claramente si $|A| = 0$, la matriz A no tendrá matriz inversa, o sea no será matriz regular

Para comprender la aplicación de este método, lo haremos mediante un ejemplo

Matriz inversa

procedimiento

Hallemos la matriz inversa de la siguiente

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ -1 & 5 & 1 \\ 3 & 6 & -2 \end{pmatrix}$$

C**omenzaremos** hallando $|A| = \begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 \\ -1 & 5 & 1 \\ 3 & 6 & -2 \end{vmatrix} = -10 + 6 - 18 - 45 - 6 - 4 = -77;\quad luego|A| \neq 0$ y la matriz A tendrá inversa

A continuación hemos de hallar los adjuntos de todos los elementos de la matriz A

$$\boldsymbol{A_{11} = (-1)^{1+1}\begin{vmatrix} 5 & 1 \\ 6 & -2 \end{vmatrix} = -16;\ A_{12} = (-1)^{1+2}\begin{vmatrix} -1 & 1 \\ 3 & -2 \end{vmatrix} = 1;\ A_{13} = (-1)^{1+3}\begin{vmatrix} -1 & 5 \\ 3 & 6 \end{vmatrix} = -21}$$

$$\boldsymbol{A_{21} = (-1)^{2+1}\begin{vmatrix} 2 & 3 \\ 6 & -2 \end{vmatrix} = 22;\ A_{22} = (-1)^{2+2}\begin{vmatrix} 1 & 3 \\ 3 & -2 \end{vmatrix} = -11;\ A_{23} = (-1)^{2+3}\begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 6 \end{vmatrix} = -0}$$

$$\boldsymbol{A_{31} = (-1)^{3+1}\begin{vmatrix} 2 & 3 \\ 5 & 1 \end{vmatrix} = -13;\ A_{32} = (-1)^{3+2}\begin{vmatrix} 1 & 3 \\ -1 & 1 \end{vmatrix} = -4;\ A_{33} = (-1)^{3+3}\begin{vmatrix} 1 & 2 \\ -1 & 5 \end{vmatrix} = 7}$$

Finalmente la matriz de adjuntos queda de la siguiente forma

$$\Delta = (Adj(A)) = \begin{pmatrix} -16 & 1 & -21 \\ 22 & -11 & 0 \\ -13 & -4 & 7 \end{pmatrix}$$

Matriz inversa

Procedimiento y conclusiones

El cálculo de la matriz de adjuntos se suele hacer directamente poniendo

$$\Delta=\begin{pmatrix} +\begin{vmatrix}\mathbf{5} & \mathbf{1}\\ \mathbf{6} & \mathbf{-2}\end{vmatrix} & -\begin{vmatrix}\mathbf{-1} & \mathbf{1}\\ \mathbf{3} & \mathbf{-2}\end{vmatrix} & +\begin{vmatrix}\mathbf{-1} & \mathbf{5}\\ \mathbf{3} & \mathbf{6}\end{vmatrix}\\ -\begin{vmatrix}\mathbf{2} & \mathbf{3}\\ \mathbf{6} & \mathbf{-2}\end{vmatrix} & +\begin{vmatrix}\mathbf{1} & \mathbf{3}\\ \mathbf{3} & \mathbf{-2}\end{vmatrix} & -\begin{vmatrix}\mathbf{1} & \mathbf{2}\\ \mathbf{3} & \mathbf{6}\end{vmatrix}\\ +\begin{vmatrix}\mathbf{2} & \mathbf{3}\\ \mathbf{5} & \mathbf{1}\end{vmatrix} & -\begin{vmatrix}\mathbf{1} & \mathbf{3}\\ \mathbf{-1} & \mathbf{1}\end{vmatrix} & +\begin{vmatrix}\mathbf{1} & \mathbf{2}\\ \mathbf{-1} & \mathbf{5}\end{vmatrix}\end{pmatrix}$$

Ventajas del método:

- Mecánico
- Estructurado

Desventajas del método: Mucho cálculo

A continuación construimos la matriz traspuesta de la matriz de adjuntos de A

$$(\boldsymbol{Adj(A)})^{\boldsymbol{t}}=\begin{pmatrix}-16 & 1 & -21\\ 22 & -11 & 0\\ -13 & -4 & 7\end{pmatrix}^{\boldsymbol{t}}=\begin{pmatrix}\mathbf{-16} & \mathbf{22} & \mathbf{-13}\\ \mathbf{1} & \mathbf{-11} & \mathbf{-4}\\ \mathbf{-21} & \mathbf{0} & \mathbf{7}\end{pmatrix}$$

Para matrices sencillas como por ejemplo 2x2 se recomienda método directo

Finalmente aplicamos la fórmula

$$A^{-1}=\frac{1}{|A|}[Adj(A)]^{t}$$

$$A^{-1}=\frac{1}{-77}\begin{pmatrix}\mathbf{-16} & \mathbf{22} & \mathbf{-13}\\ \mathbf{1} & \mathbf{-11} & \mathbf{-4}\\ \mathbf{-21} & \mathbf{0} & \mathbf{7}\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}\frac{\mathbf{-16}}{\mathbf{-77}} & -\frac{\mathbf{22}}{\mathbf{77}} & \frac{\mathbf{-13}}{\mathbf{-77}}\\ -\frac{\mathbf{1}}{\mathbf{77}} & \frac{\mathbf{-11}}{\mathbf{-77}} & \frac{\mathbf{-4}}{\mathbf{-77}}\\ \frac{\mathbf{-21}}{\mathbf{-77}} & -\frac{\mathbf{0}}{\mathbf{77}} & -\frac{\mathbf{7}}{\mathbf{77}}\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}\frac{\mathbf{16}}{\mathbf{77}} & -\frac{\mathbf{2}}{\mathbf{7}} & \frac{\mathbf{13}}{\mathbf{77}}\\ -\frac{\mathbf{1}}{\mathbf{77}} & \frac{\mathbf{1}}{\mathbf{7}} & \frac{\mathbf{4}}{\mathbf{77}}\\ \frac{\mathbf{3}}{\mathbf{11}} & \mathbf{0} & -\frac{\mathbf{1}}{\mathbf{11}}\end{pmatrix}$$

Finalmente la matriz inversa será:

$$A^{-1}=\begin{pmatrix}\frac{16}{77} & -\frac{2}{7} & \frac{13}{77}\\ -\frac{1}{77} & \frac{1}{7} & \frac{4}{77}\\ \frac{3}{11} & 0 & -\frac{1}{11}\end{pmatrix}$$