



Divisibilidad

Números Naturales

Divisibilidad

ÍNDICE

1. Múltiplos
2. Divisores. Criterios de divisibilidad
3. Números primos
4. Descomposición de números naturales en números primos
5. **M.C.D. y M.C.M**
6. Problemas

Máximo común divisor: M.C.D.

Se llama máximo común divisor de varios números naturales al mayor de los divisores comunes a todos ellos y se escribe M.C.D.

Divisores de 60 \rightarrow 1, 2, 3, 4, 5, 6, 10, 12, 30, 60.

Divisores de 84 \rightarrow 1, 2, 3, 4, 6, 7, 9, 12, 14, 21, 28, 84

El m.c.d. sirve para:

- Resolver problemas
- Operar fracciones

Estamos buscando un número que sea común, es decir que estén en ambos números, y que además sea divisor de ellos y el más grande.

Hemos escrito todos los divisores de 60 y 84 y el número que cumple esto es 12, luego podemos decir que:

$$\text{M.C.D}(60, 84) = 12 \quad (\text{máximo común divisor de } 60 \text{ y } 84)$$

M.C.D

1. Factorizamos los números.
2. Tomamos los factores comunes a todos los números elevados el menor exponente.
3. El producto de los factores considerados en el paso 2 es el M.C.D

Recuerda que común significa que se repita, por lo tanto tendrás que coger los factores que se repitan en todos los números y que tengan el menor exponente

← 70, 20

$$\begin{array}{r|l} 70 & 2 \\ 35 & 5 \\ 7 & 7 \\ 1 & \end{array} \quad \begin{array}{r|l} 20 & 2 \\ 10 & 2 \\ 5 & 5 \\ 1 & \end{array} \quad \begin{array}{l} 70 = 2 \cdot 5 \cdot 7 \cdot 1 \\ 20 = 2^2 \cdot 5 \cdot 1 \\ \text{M.C.D}(20, 70) = 2 \cdot 5 = 10 \end{array}$$

Calcula el m.c.d. de los siguientes pares de números:

- a) 70 y 45
- b) 121 y 55
- c) 42 y 66
- d) 224 y 80

M.C.D.

M.C.D Para hallar el máximo común divisor de varios números haremos lo siguiente:

1. Descomponer los números en factores primos
2. Aplicar la regla del M.C.D.

M.C.D "Tomaremos los factores comunes que tengan menor exponente".

Recuerda que para que un factor sea común debe estar en todos los números que hemos descompuesto

Halla el M.C.D de 14, 36 y 12

Ejemplo: M.C.D. (14, 36, 12) = 2 ✓

14 2	36 2	12 2
7 7	18 2	6 2
1	9 3	3 3
	3 3	1
	1	

$14 = 2 \times 7$

$36 = 2^2 \times 3^2$

$12 = 2^2 \times 3$

El factor 3 **no** es común porque no está en todos los números

El factor 2 sí es factor común

Calcula el M.C.D de:

- | | |
|------------------|-----------------|
| a) 16 y 21 | e) 33, 11 y 22 |
| b) 180 y 324 | f) 66, 42 y 120 |
| c) 96, 240 y 180 | g) 75, 25 y 200 |
| d) 72, 108 y 60 | h) 81, 44 y 16 |

Mínimo común múltiplo. M.C.M.

El mínimo común múltiplo de varios números naturales es el menor de los múltiplos que tienen en común, y se escribe m.c.m.

Múltiplos de 20 → 20, 40, 60, 80, 100, 120, ...

Múltiplos de 15 → 15, 30, 45, 60, 75, 90, 105, 120, ...

El m.c.m. sirve para:

- Resolver problemas
- Operar fracciones

Estamos buscando un número que sea común, es decir que estén en ambos números, y que además sea múltiplo de ellos y el más pequeños.

Hemos escrito algunos múltiplos de 20 y 15 y el número que cumple esto es 60, luego podemos decir que:

$$\text{m.c.m.}(15, 20) = 60 \quad (\text{mínimo común múltiplo de 15 y 20})$$

M.C.M.

1. Factorizamos los números
2. Tomamos los factores comunes y no comunes elevados al mayor exponente.
3. El producto de esos factores del paso anterior es el m.c.m.

Recuerda que común significa que se repita, por lo tanto tendrás que coger los factores que se repitan y que tengan el mayor exponente además de los que no se repitan

←

70, 20

$$\begin{array}{r|l} 70 & 2 \\ 35 & 5 \\ 7 & 7 \\ 1 & \end{array} \quad \begin{array}{r|l} 20 & 2 \\ 10 & 2 \\ 5 & 5 \\ 1 & \end{array}$$

$$70 = 2 \cdot 5 \cdot 7 \cdot 1$$

$$20 = 2^2 \cdot 5 \cdot 1$$

$$\text{m.c.m.}(20, 70) = 2^2 \cdot 5 \cdot 7 = 140$$

Calcula el m.c.m. de los siguientes pares de números:

- a) 40 y 24
- b) 16 y 40
- c) 30 y 66
- d) 24 y 80

Mínimo común múltiplo

Los factores 2 y 3
Son comunes a todos
Los números.

El factor 7 no es común

m.c.m Para hallar el mínimo común múltiplo de varios números haremos lo siguiente:

1. Descomponer los números en factores primos
2. Aplicar la regla del m.c.m.

m.c.m "Tomaremos los factores no comunes y de entre los factores comunes aquellos que tengan el mayor exponente".
Recuerda que para que un factor sea común en este caso, **puede no** estar en todos los números que hemos descompuesto pero sí en más de uno de ellos

Halla el m.c.m de 540, 168 y 900

El factor 5 **no** es común a todos los números, pero hemos de considerar el que tenga mayor exponente, dado que aparece en dos de ellos

540, 168, 900.

540 2)	168 2)	900 2)
270 2)	84 2)	450 2)
135 3)	42 2)	225 3)
45 3)	21 3)	75 3)
15 3)	7 7)	25 5)
5 5)		5 5)
1		1

$540 = 2^2 \cdot 3^3 \cdot 5$
 $168 = 2^3 \cdot 3 \cdot 7$
 $900 = 2^2 \cdot 3^2 \cdot 5^2$
gcd =

Calcula el m.c.m de:

- | | |
|------------------|-----------------|
| a) 16 y 21 | e) 33, 11 y 22 |
| b) 180 y 324 | f) 66, 42 y 120 |
| c) 96, 240 y 180 | g) 75, 25 y 200 |
| d) 72, 108 y 60 | h) 81, 44 y 16 |